I/ Limites :

1/ Définition

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in V(x_0)$ (voisinage de x_0)
$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

2/ Unicité de la limite

Théorème : Si f admet une limite en x_0 alors cette limite est unique

3/ Limite et suite

Théorème : f admet une limite ℓ au point $x_0 \iff \forall (U_n)$ suite convergente vers x_0 alors $f(U_n)$ converge vers ℓ

4/ Limite à droite - à gauche

Définition : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \cdot \forall x \in V(x_0) : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 : \forall x \in V(x_0) : -\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Propriété : f admet une limite ℓ en $x_0 \iff f$ admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 égales

5/ Limite de fonction monotone

a/ Si f est croissante (décroissante) sur $[a, +\infty[$ ($]-\infty, a]$) et f majorée (minorée) alors f admet une limite finie en $+\infty$ (en $-\infty$)

b/ Si f est croissante (décroissante) et f non majorée (non minorée) (sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$) alors $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$)

6/ Opérations sur les limites

Somme, produit, inverse, rapport,

7/ Limites infinies

a/ Formes indéterminées : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty$

b/ Opérations sur $\pm\infty$: $\frac{k}{\infty} = 0, \quad \frac{k}{0} = \infty$

8/ Limites usuelles

a/ Polynômes : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$, $\lim_{\infty} P(x) = \lim_{\infty} a_n x^n$

b/ Fonctions rationnelles : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots}$

* $\lim_{\infty} f(x) = \lim_{\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

ETUDUP .com

* Si $Q(x_0)=0$ et $P(x_0)\neq 0$ alors $\lim\limits_{x_0} f(x) = \infty$

* Si $Q(x_0)=0$ et $P(x_0)=0$ alors on écrit $f(x)=\dfrac{(x-x_0)P_1(x)}{(x-x_0)Q_1(x)} = \ldots$

c/ Fonction irrationnelle $f(x)=\sqrt[n]{u(x)}$

si $\lim u(x) = \ell \geqslant 0$ alors $\lim f(x) = \sqrt[n]{\ell}$

si $\lim u(x) = +\infty$ alors $\lim f(x) = +\infty$

d/ Fonction trigonométrique

$\lim\limits_0 \dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_0 \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$ $\quad \lim\limits_0 \dfrac{\tan x}{x} = 1$

e/ fonction ln et e^x

$\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{0^+} x\ln x = 0$, $\lim\limits_0 \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{-\infty} x e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_0 \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

g/ Règle de l'hôspital

$$\lim_{x_0,\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x_0,\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

10/ Utilisation des fonctions equivalentes

Déf: f et g sont equivalentes au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

et on écrit $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ou $f = g + o(g)$

Propriétés: si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 g_1 \underset{x_0}{\sim} f_2 g_2$ et $\dfrac{f_1}{g_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{f_2}{g_2}$

Exemple : $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$; $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $x^5 - 3x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^5$

Remarque: Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell$

Theorème : Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $\lim\limits_{x_0} f(x) = \lim\limits_{x_0} g(x)$

11/ Limite et ordre

Si $f(x) < g(x)$ alors $\lim f(x) \leq \lim g(x)$

Si $f_1(x) < f(x) < g(x)$ et $\lim f_1(x) = \lim g(x) = \ell$ alors $\lim f(x) = \ell$

Si $|f(x) - \ell| < g(x)$ et $\lim g(x) = 0$ alors $\lim f(x) = \ell$

Si $f(x) < g(x)$ et $\lim f(x) = +\infty$ alors $\lim g(x) = +\infty$

Si et si $\lim g(x) = -\infty$ alors $\lim f(x) = -\infty$

ETUDUP .com

II/ Continuité

1/ Définition: f continue en $x_0 \iff \lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$

c-à-d $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in V(x_0) : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

2/ Suite et continuité

Théorème: f est continue en $x_0 \iff \forall (U_n)$ suite convergente vers x_0 alors $f(U_n)$ converge vers $f(x_0)$

f non continue en $x_0 \iff \exists (U_n)$ suite convergente vers x_0 mais $f(U_n)$ ne converge pas vers $f(x_0)$

3/ Continuité à droite (à gauche)

Définition: f continue à droite (à gauche) en $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\right)$

Propriétés f continue en $x_0 \iff f$ continue à droite et continue à gauche en x_0

4/ Prolongement par continuité

Théorème et définition: Si f n'est pas définie en x_0 et admet une limite finie ℓ en x_0 alors f admet un prolongement g par continuité définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$

5/ Continuité sur un intervalle

f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout de I (et continue à droite et à gauche de points à l'extremité de I)

6/ Continuité des fonctions usuelles

- les fonctions $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$, polynomes, $x \longmapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- les fonctions rationnelle et irrationnelle sont continues sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition (de même pour $x \longmapsto \tan x$)

7/ Opérations: somme, produit, rapport, inverse, Composée

8/ Continuité uniforme

a/ Définition: f est uniformément continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall (x,y) \in I^2 : |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

b/ Propriété: Si f est uniformément continue sur I alors f est continue sur I

Remarque: la réciproque n'est pas toujours vraie

c/ Théorème de Heine: Toute fonction continue sur I : intervalle fermé borné ($I = [a,b]$) est uniformément continue sur I

ETUDUP .com

9/ L'image d'un intervalle

par une fonction f continue

Theoreme 1: L'image $f(I)$ d'un intervalle I est un intervalle

Theoreme 2: L'image d'un segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $[m,M]$. On dit ainsi que toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes, càd

$\forall x \in [a,b]: \quad m \leq f(x) \leq M$ et $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1)=m$ et $f(x_2)=M$

10/ Fonction reciproque

Theoreme: Si f est continue et strictement monotone sur I alors f admet une fonction reciproque f^{-1} definie sur $J=f(I)$ par

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases}$$

Propriétés: • f et f^{-1} ont même sens de variation respectivement sur I et J
• f^{-1} est continue sur J • C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symetriques par rapport à $D: y=x$

Exemples: fonctions reciproques de fonctions trigonometrique

$y = \text{Arc}\sin x$, $x \in [-1,1] \Leftrightarrow x = \sin y$; $y \in [-\pi/2, \pi/2]$
$y = \text{Arc}\cos x$, $x \in [-1,1] \Leftrightarrow x = \cos y$, $y \in [0,\pi]$
$y = \text{Arc}\tan x$, $x \in]-\infty,+\infty[\Leftrightarrow x = \tan y$; $y \in]-\pi/2, \pi/2[$

III/ Derivabilité

1/ Définition: f est derivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe (noté $f'(x_0)$)

2/ Derivation et continuite: Si f est derivable en x_0 alors f est cont en x_0

3/ Tangente à la courbe

Theoreme: Si f est derivable en x_0 alors (C_f) admet une tangente T au point $(x_0, f(x_0))$ d'equation : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

4/ Derivabilité à droite (à gauche)

Def: f est derivable à droite (à gauche) en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\left(\lim_{x_0^-}\right)$ existe

Th: f est derivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est derivable à droite et derivable à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

5/ Operations: somme, produit, rapport, composée

Derivation de f^{-1}: Si f est derivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est derivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

ETUDUP .com

6/ Formules

$(u+v)' = u'+v'$, $(ku)' = ku'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

7/ Tableau des fonctions dérivées usuelles (voir à la fin)

8/ Dérivées successives

Si f est dérivable n fois alors On pose:

$f^{(0)} = f$ $f^{(1)} = f'$ $f^{(2)} = f''$; $f^{(3)} = f'''$; $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

9/ Formule de Leibniz

Théorème: f et g 2 fonctions n fois dérivable au point x_0 alors

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

10/ Théorèmes généraux

a/ Théorème des valeurs intermédiaires

- Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in [a,b[$ tel que $f(c) = 0$: (l'équation $f(x) = 0$ admet au moins 1 solution dans $[a,b]$)
- Si de plus f est strictement monotone alors c est unique (l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a,b]$)

b/ Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

c/ Théorème des Accroissements finis

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a) f'(c)$

Application sur l'intervalle $[0,x]$

Si f continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$: $\exists \theta \in]0,1[$: $f(x) = f(0) + x f'(\theta x)$

d/ Formule de Taylor - Lagrange

: Si f est n fois dérivable sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que :

ETUDUP .com

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

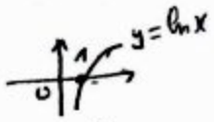
e/ Formule de Mac-Laurin

Si f est n fois dérivable sur $[0,x]$ et $(n+1)$ fois dérivables sur $]0,x[$ alors $\exists \theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

II/ Fonctions usuelles

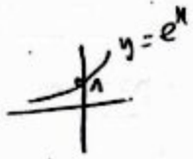
a/ Logarithme népérien : $\ln x$



$\ln$ continue, dérivable, strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln a^r = r \ln a$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

b/ Logarithme de base a : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$



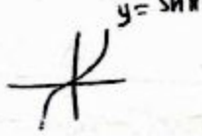
c/ Exponentielle népérien : e^x

e^x : continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$

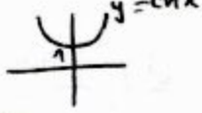
$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^b = e^{ab}$, $e^0 = 1$, $e^1 = e$

d/ Exponentielle de base a : $a^x = e^{x \ln a}$

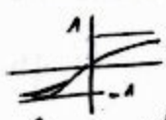
e/ Sinus hyperbolique : $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



f/ Cosinus hyperbolique : $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



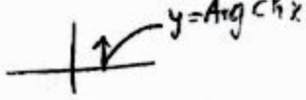
g/ tangente hyperbolique : $\tan x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$



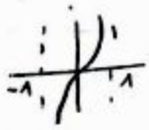
i/ Argument sinus, cosinus, tangente hyperbolique : Argsh, Argch, Argth

$y = \operatorname{Argsh} x, x \in \mathbb{R} \iff x = \operatorname{sh} y, y \in \mathbb{R}$

$y = \operatorname{Argch} x, x \in [1,+\infty[\iff x = \operatorname{ch} y, y \in \mathbb{R}$



$y = \operatorname{Argth} x ; x \in]-1,1[\iff x = \operatorname{th} y, y \in \mathbb{R}$



Remarque : On démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\forall x \geq 1$ $\operatorname{Argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$\forall x \in]-1,1[$ $\operatorname{Argth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

Dérivées usuelles

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos ax)' = -a \sin ax$, $(\cos u)' = -u' \sin u$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(x^n)' = n x^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$, $(\sin ax)' = a \cos ax$, $(\sin u)' = u' \cos u$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = u' e^u$, $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\tan ax)' = a(1+\tan^2 ax) = \frac{a}{\cos^2 ax}$, $(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u)$

$(\operatorname{Arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{Arccos} u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\operatorname{Arcsin} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{ch} u)' = u' \operatorname{sh} u$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

$(\operatorname{ch} u)' = u' \operatorname{ch} u$, $(\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x$, $(\operatorname{th} u)' = u'(1-\operatorname{th}^2 u)$, $(\operatorname{Argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{Argch} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$, $(\operatorname{Argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\operatorname{Argsh} u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$, $(\operatorname{Argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $(\operatorname{Argth} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

ETUDUP .com

et encore plus..